Principiul lui Dirichlet (cutiei)

conf.univ.dr. Doru Popescu Anastasiu, Slatina

Principiul lui Dirichlet (întâlnit şi sub denumirea de principiul cutiei) are următorul enunţ:

Se consideră n+1 obiecte şi n cutii. Dorim să punem în cutii toate obiectele, *astfel sigur va exista o cutie care să conţină cel puţin două obiecte.*

Probleme propuse

1. Se dau două numere naturale a şi b prime între ele. Să se determine n≤b, astfel ca a^n-1 să se dividă prin b.

Exemplu
Pentru a=2 şi b=5, avem: n=4.

Indicaţie
Din faptul că a şi b sunt prime între ele, rezultă că a, a^2, …, a^b nu se divid cu b. Atunci resturile ce se obţin împărţind numere a, a^2, …, a^b la b sunt din mulţimea: {1, 2, …, b-1}. Din Principiul lui Dirichlet rezultă că există k şi l (k>l), naturale nenule, k,l≤b, astfel ca a^k şi a^l să dea acelaşi rest la împărţirea prin b. Rezultă $a^l(a^{k-l}-1)$ se divide prin b şi cum a^l şi b sunt prime între ele (pentru că a şi b sunt prime între ele), obţinem că a^{k-l}- 1 se divide la b.

2. Se dă o mulţime A={a[1],a[2],…,a[n]}, cu elemente numere reale (1≤n≤5000). Se cere să se determine o submulţime B a lui A, nevidă cu proprietatea că partea fracţionară a sumei elementelor lui B este strict mai mică decât 1/n.

Date de intrare
În fişierul text MULTIME.IN se află pe prima linie n, iar pe a doua linie elementele lui A separate între ele prin câte un spaţiu.

Date de ieşire
În fişierul text MULTIME.OUT se va scrie pe prima linie elementele lui B separate prin câte un spaţiu.

Exemplu

```
MULTIME.IN
5
2.3 22.5 5.23 7.71 55.6
MULTIME.OUT
22.5 55.6
```

Indicaţie

Se construieşte vectorul s cu componentele:
s[1]=partea fracţionară din a[1];
s[2]=partea fracţionară din a[1]+a[2];
…
s[n]=partea fracţionară din a[1]+a[2]+…+a[n].
Intervalul [0,1) se partiţionează folosind intervalele (0, 1/n], (1/n, 2/n],…, ((n-1)/n, n/n].
Dacă există i cu s[i] în intervalul [0,1/n), atunci B={a[1],…,a[i]}, altfel conform principiului lui Dirichlet există i şi j cu s[i],s[j]∈(0,1/n], atunci B={a[i+1],…,a[j]}.

3. Se dă o mulţime A de n+1 elemente numere naturale nenule, mai mici sau egale cu 2n. Să se determine două submulţimi X şi Y, incluse în A, astfel încât produsul elementelor dintr-o submulţime să fie divizibil cu produsul elementelor din cealaltă submulţime.

Date de intrare

În fişierul text MULTIME.IN se află pe prima linie n, iar pe linia următoare cele n+1 elemente ale mulţimii A (separate între ele prin câte un spaţiu).

Date de ieşire

În fişierul text MULTIME.OUT se va scrie pe prima linie elemetele multimii X, iar pe linia următoare elementele mulţimii Y.

Exemplu

MULTIME.IN

```
4
2 3 4 5 7
```

MULTIME.OUT

```
2
4
```

Indicaţie

Fie a_1, a_2, …, a_{n+1} cele n+1 numere naturale. După o prealabilă ordonare şi renumerotare avem: $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{n+1} \le 2n$. Orice număr natural se poate scrie sub forma $2^x y$, unde x este un număr natural, iar y este un număr natural impar. Deci $a_1=2^{x(1)}y(1)$, $a_2=2^{x(2)}y(2)$, …, $a_{n+1}=2^{x(n+1)}y(n+1)$. Dar între 1 şi 2n există exact n numere impare şi deci, conform principiului cutiei, două dintre numerele y(1), y(2), …, y(n+1) sunt egale. Fie acestea y(i) şi y(j) cu i<j. Atunci numărul $a_i=2^{x(i)}y(i)$ divide pe $a_j=2^{x(j)}y(j)$.

4. Se dau n+1 numere naturale diferite şi mai mici decât 2n. Se cere să se determine trei numere dintre cele date care au proprietatea că unul dintre ele este egal cu suma celorlalte două.

Date de intrare
În fişierul text NUMERE.IN se află pe prima linie n, iar pe linia următoare cele n+1 numere.

Date de ieşire
În fişierul text NUMERE.OUT se va scrie pe prima linie c ele trei numere separate între ele prin câte un spaţiu.

Exemplu
NUMERE.IN
```
4
2 3 4 5 7
```
NUMERE.OUT
```
2 3 5
```

Indicaţie
Fie a_1, a_2, …, $a_{n,}$ a_{n+1} cele n+1 numere naturale cu proprietatea că $a_i \le 2n$, pentru $1 \le i \le n+1$. Vom ordona elementele din şirul de numere astfel încât să obţinem $a_1<a_2<\ldots<a_n<a_{n+1}$. Atunci $a_{n+1}-a_1$, $a_{n+1}-a_2$, …, $a_{n+1}-a_n$ sunt numere naturale mai mici decât 2n. Avem astfel în total (cu cele iniţiale) n+1+n=2n+1 numere. Cum ele sunt mai mici decât 2n, conform principiului lui Dirichlet, există douş numere care vor coincide:
$a_i=a_{n+1}-a_j$, $1 \le i \le n+1$, $1 \le j \le n$
Deci $a_{n+1}=a_i+a_j$.

5. Fie $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ un vector cu componente întregi. Să se determine o secvenţă $(a_i,\ldots,a_j)$, cu proprietatea că $a_i+\ldots+a_j$ este un multiplu de n.

Indicaţie
Pentru a determina o secvenţă cu proprietatea din enunţ vom considera sumele:
$S_1=a_1$
$S_2=a_1+a_2$
. . . .
$S_i=a_1+a_2+\ldots+a_i$
. . . .
$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.
Putem avea două cazuri:
1) există k cu S_k multiplu de n, caz în care secvenţa căutată este $a_1,\ldots,a_k$;
2) nu există sume care să fie divizibile cu n. În acest caz avem că toate sumele dau la împărţirea la n resturi ce fac parte din mulţimea {1,2,…,n-1}. Cum sunt n sume şi n-1 resturi posibile, conform principiului lui Dirichlet obţinem că exită două sume S_p şi S_q,(p<q) care la împărţirea la n dau acelaşi rest. Deci S_q-S_p este divizibilă cu n şi deci putem lua i=p+1 şi j=q.

6. Se consideră un număr natural care are n cifre, toate nenule. Se cere să se determine un alt număr natural format doar din cifrele numărului iniţial (nu este obligatorie utilizarea tuturor cifrelor şi în plus se poate folosi şi cifra 0) şi care se divide la n.

Exemplu
Pentru numarul 1111 o soluţie poate fi 1000 sau 1100.

Indicaţie
Fie A=$a_1a_2\ldots a_n$ numărul dat. Considerăm numerele: a_n, $a_{n-1}a_n$, …, $a_1a_2\ldots a_n$.
Acestea au resturile împărţirii la n în mulţimea {0, 1, …, n-1}. Dacă există un rest 0, atunci numărul respectiv este cel căutat. Dacă nu, avem de-a face cu n resturi din mulţimea {1, 2, …, n-1}, adică n-1 resturi şi conform principiului cutiei vor exista două resturi egale, deci două numere B şi C care au acelaşi rest la împărţirea cu n. Scădem aceste numere şi rezultatul este ceea ce ne interesează.

7. Fie n un număr întreg. Găsiţi un număr în baza 10 divizibil cu n şi format numai din cifre de 1 şi 0.

Indicaţie
Vom considera numerele 1, 11, 111, …, 11…1 (ultimul având n cifre de 1). Putem avea două situaţii:
1) Printre numerele anterioare există unul care este multiplu de n. Rezultă că acesta este numărul căutat.
2) Toate numerele anterioare dau la împărţirea cu n resturi nenule, adică 1, 2, …, n-1. Întrucât avem n numere şi n-1 resturi, conform principiului lui Dirichlet există două numere care dau acelaşi rest. Obţinem astfel că diferenţa acestor două numere este numărul căutat (care este evident format din cifrele 0 şi 1).

8. Se dau 2n+1 numere reale mai mari ca 1 şi mai mici ca 2n. Să se determine trei dintre ele care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Exemplu
Pentru n=2 şi numerele:
1.7 2.9 3.88 1.4 2.55
se va afişa:
2.9 3.88 2.55

Indicaţie
Intervalul $(1, 2^n)$ poate fi partiţionat în n intervale:
$(1, 2)$; $[2, 2^2)$, $[2^2, 2^3)$, . . ., $[2^{n-1}, 2^n)$.
Conform Principiului lui Dirichlet, există un interval din cele n de mai sus ce conţine cel puţin trei din cele 2n+1 numere. Fie a_1, a_2, a_3 aceste numere, situate ţn intervalul $[2^k, 2^{k+1})$, $0 \le k \le n-1$. Avem: $2^k \le a_1 \le 2^{k+1}$, $2^k \le a_2 \le 2^{k+1}$, $2^k \le a_3 \le 2^{k+1}$. Deci $a_3 \le 2^{k+1} = 2^k + 2^k \le a_1 + a_2$. Analog: $a_1 \le a_3 + a_2$. $a_2 \le a_1 + a_3$.